

§ Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων.① Παράλληλη Μεταφορά

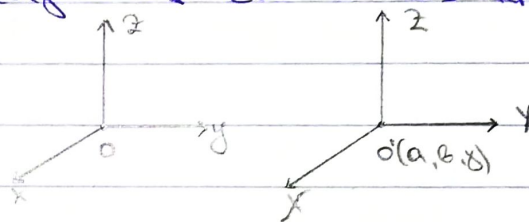
Εάν $\{O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$ και $\{O', \vec{x}', \vec{y}', \vec{z}'\}$ δύο συστήματα συντεταγμένων με:

$$\begin{cases} \vec{x}_0 = \vec{x}' \\ \vec{y}_0 = \vec{y}' \\ \vec{z}_0 = \vec{z}' \end{cases}$$

τότε οι συντεταγμένες (x, y, z) του πρώτου συστήματος, συνδέονται με τις συντεταγμένες (X, Y, Z) του δεύτερου συστήματος από τις

$$\text{Εξισώσεις: } \begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \\ Z = z - \gamma \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \\ z = Z + \gamma \end{cases}$$

όπου (a, b, γ) οι συντεταγμένες του O' ως προς το πρώτο σύστημα.

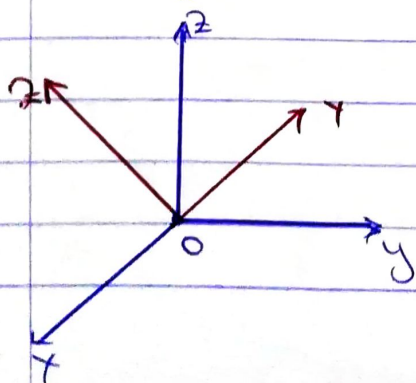
② 2-τροφή:

Έχουμε δύο συστήματα $\{O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$ και $\{O, \vec{x}', \vec{y}', \vec{z}'\}$ (δχι αναγκαστικά παράλληλοι άξονες).

Τότε οι συντεταγμένες (x, y, z) του 1ου συστήματος συνδέονται με τις συντεταγμένες (X, Y, Z) του 2ου συστ. από τις εξισώσεις:

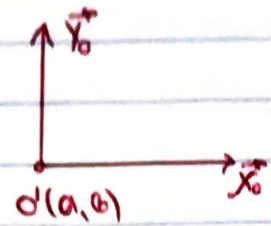
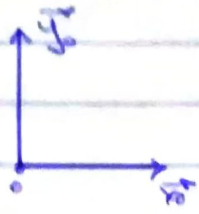
$$\begin{cases} X = a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ Y = b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ Z = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z \end{cases}$$

όπου $a_i, b_i, \gamma_i \in \{1, 2, 3\}$, οι γωνίες που σχηματίζουν οι άξονες.



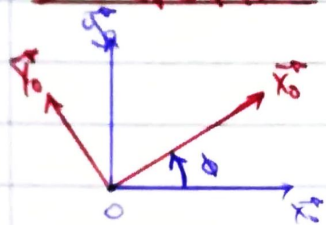
§ Εφαρμογή στο επίπεδο:

① Παράλληλη μεταφορά:



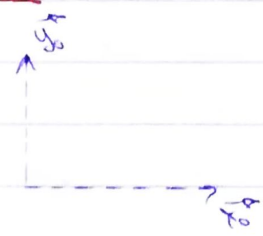
$$\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$$

② Στροφή:



$$\begin{cases} x = X \cos \phi - Y \sin \phi \\ y = X \sin \phi + Y \cos \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = x \cos \phi + y \sin \phi \\ Y = -x \sin \phi + y \cos \phi \end{cases}$$

③ Γενική περίπτωση:

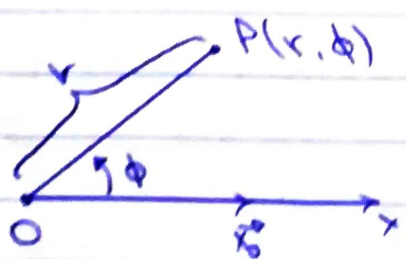


$$\begin{cases} x = a + X \cos \phi - Y \sin \phi \\ y = b + X \sin \phi + Y \cos \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = (x - a) \cos \phi + (y - b) \sin \phi \\ Y = -(x - a) \sin \phi + (y - b) \cos \phi \end{cases}$$

§ Ειδικοί συντεταγμένες:

① Πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο:

Θεωρούμε μια αρχή O και μια ευθεία Ox στο $\mathbb{R}^2$ με μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{x}^0$ πάνω σε αυτή.



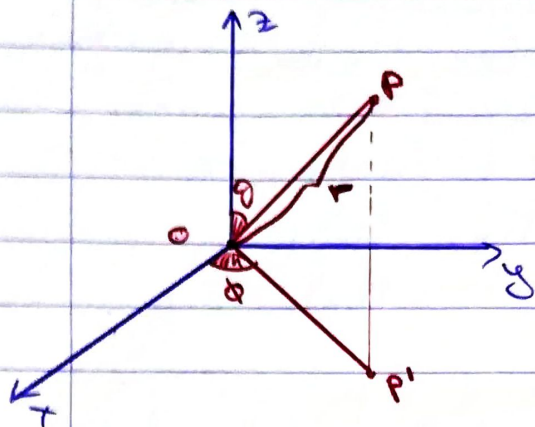
Στο οποίο σημείο P του επιπέδου, αντιστοιχίσαμε την διαάδα (r, ϕ) με:

$$\begin{cases} r = \|\vec{OP}\| \\ \phi = \angle(\vec{x}^0, \vec{OP}) \end{cases}$$

όπου $\vec{x}^0$ και $\vec{y}^0$ είναι οι μοναδιαίοι διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$.

Αναλ. Γεωμ. 12/01/2019

③ 2 φαιρικές συντεταγμένες



Σε ένα τυχόν σημείο $P(x, y, z)$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μια άλλη τριάδα αριθμών (r, ϕ, θ) , με:

$$\begin{cases} 0 \leq r < +\infty \\ 0 \leq \phi < 2\pi \\ 0 \leq \theta < \pi \end{cases}, \dots$$

Έτσι ώστε:

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi \\ y = r \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi \\ z = r \cdot \cos \theta \end{cases}$$

Η τριάδα (r, ϕ, θ) , λέγεται

φαιρικές συντεταγμένες

Ποτήδιο ⑧:

Άσκηση ①:

Δίνεται η καμπύλη $(\gamma): x^2 - 2y^2 + 2x - 12y - 18 = 0$, στο σύστημα συντεταγμένων $\{O, \vec{x}_0, \vec{y}_0\}$.

Να βρεθεί η εξίσωση της (γ) σε νέο σύστημα συντεταγμένων $\{Q, \vec{x}_0, \vec{y}_0\}$, όπου $Q(-1, -3)$ και $\vec{x}_0 = (1, 0)$, $\vec{y}_0 = (0, 1)$.

Λύση:

$$\text{Έχουμε: } \begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y - 3 \end{cases}$$

Με αντικατάσταση βρίσκουμε:

$$0 = (X-1)^2 - 2 \cdot (Y-3)^2 + 2 \cdot (X-1) - 12 \cdot (Y-3) - 18$$

$\dots$

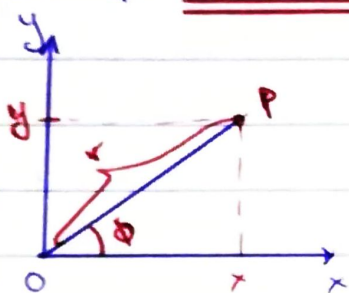
$$= X^2 - 2Y^2 - 1.$$

Η γωνία ϕ μετράται κατά την θετική φορά και $\phi \in [0, 2\pi]$. Επίσης $r \in [0, +\infty)$.

Στην αρχή 0, έχουμε $r=0$ και ϕ αφορολόγητο. Το ζεύγος (r, ϕ) λέγεται πολικές συντεταγμένες του σημείου P.

Το σημείο 0 λέγεται πόλος και η ημιευθεία Ox πολικός άξονας.

Ο αριθμός r λέγεται πολική ακτίνα και η ϕ πολική γωνία.

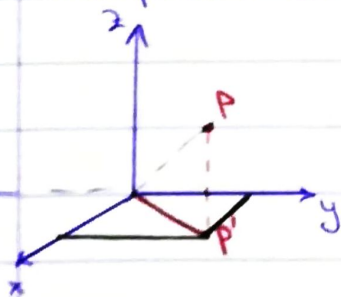


Οι πολικές και καρτεσιανές συντεταγμένες συνδέονται μέσω των εξισώσεων:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \phi \\ y = r \cdot \sin \phi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \phi = \frac{y}{x} \end{cases}$$

② Κυλινδρικές συντεταγμένες

Θεωρούμε το σύνολο $\{0, x_0^*, y_0^*, z_0^*\}$



Έστω $P(x, y, z)$ τυχαίο σημείο του $\mathbb{R}^3$.

Συμβολίζουμε με P' την προβολή του P στο Oxy επίπεδο.

Το OP' μπορούμε να περιγράψουμε με πολικές συντεταγμένες.

Συνολικά, μπορούμε να περιγράψουμε το σημείο P ως εξής:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \phi \\ y = r \cdot \sin \phi \\ z = z \end{cases}$$

Οι συντεταγμένες (r, ϕ, z) , λέγονται κυλινδρικές συντεταγμένες.

Άσκηση ②:

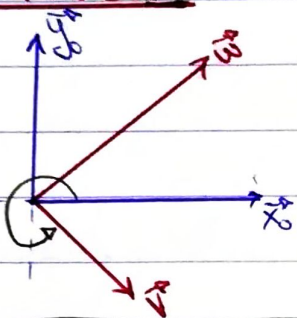
①

Δίνεται η καμπύλη: (8) $x^2 + 3y^2 - 2\sqrt{3}xy - 2\sqrt{3}x - 2y = 0$

στο σύστημα συντεταγμένων $\{0, \vec{x}, \vec{y}\}$.

Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης στο
σύστημα $\{0, \vec{v}, \vec{w}\}$ με $\vec{v} = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$
 $\vec{w} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

Λύση:



$$\text{Έχουμε: } \langle \vec{v}, \vec{x} \rangle = \frac{1}{2} = \cos \phi.$$

Συνεπώς:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y. \end{cases}$$

(Αντικατά-
σταση
στην
εξίσωση ⑧)

$$0 = \left(\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y\right)^2 + 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y\right)^2 - 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y\right) -$$
$$- 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y\right) \quad \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \boxed{Y = X^2}$$

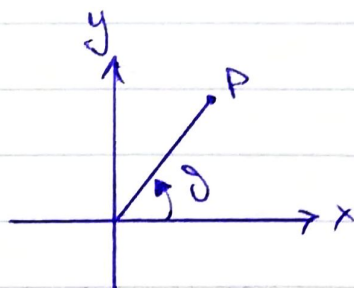
Άσκηση ③:

Δίνεται γεωμετρικές συντεταγμένες (r, θ) η εξίσωση:

$r \cdot \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = 4$. Να μετασχηματιστεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

Λύση:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$



Έχουμε:

$$4 = r \left\{ \cos \theta \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin \theta \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right\} \quad \Leftrightarrow$$

$$4 = r \cdot \cos \theta \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + r \cdot \sin \theta \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x + \frac{\sqrt{2}}{2} y \quad \Leftrightarrow$$

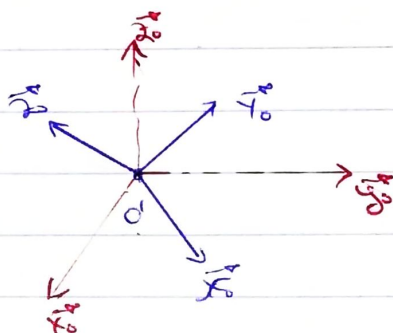
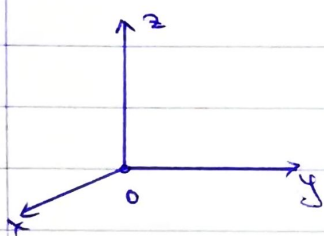
$$4 = \frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2} y$$

Παρατήρηση:
 Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$ είναι

ορθογώνιος : $A \cdot A^T = I \Leftrightarrow A^{-1} = A^T$

③ Γενική περίπτωση:

Συνιστάμενος παράλληλης μεταφοράς και στροφής:
 Έχουμε το σύστημα $\{O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$ και το
 $\{O', \vec{x}_0', \vec{y}_0', \vec{z}_0'\}$



Στην γενική περίπτωση, οι συντεταγμένες
 (x, y, z) και (X, Y, Z) συνδέονται από τις
 εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = a + a_1 X + b_1 Y + \gamma_1 Z \\ y = b + a_2 X + b_2 Y + \gamma_2 Z \\ z = \gamma + a_3 X + b_3 Y + \gamma_3 Z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = a_1(x-a) + a_2(y-b) + a_3(z-\gamma) \\ Y = b_1(x-a) + b_2(y-b) + b_3(z-\gamma) \\ Z = \gamma_1(x-a) + \gamma_2(y-b) + \gamma_3(z-\gamma) \end{cases}$$